Colles Lakanal - Semaine 27

Paul Duverneuil, `Classe de PCSIa`

Thème : dimension d'un espace vectoriel, matrices, rang d'une appliction linéaire.

1. Question de cours

(a) Montrer que toutes les bases ont même cardinal.

(b) Montrer le théorème de la base incomplète : à partir de G génératrice et de L libre on peut former B base.

(c) Montrer l'existence d'un supplémentaire en dimension finie.

2. Exercices

(a) Montrer que tout endomorphisme de rang $r \geq 1$ est somme de r endomorphismes de rang 1.

(b) Soit $f : \mathbb{C}[\mathbb{X}] \rightarrow \mathbb{C}[\mathbb{X}]$ telle que $f(P) = P(X+1) - P(X)$.

1) Montrer que f est linéaire
2) Trouver le noyau de f
3) Injectivité et surjectivité de f ?
4) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$ notée $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, telle que : $\forall i \in \mathbb{N}^*, f(e_i) = e_{i-1}$
5) Exprimer la matrice de la restriction de f à $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ dans la base restreinte $(e_0, ..., e_{n-1})$ et en déduire que cette restriction est nilpotente

(c) Sur les matrices de trace nulle :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 2$ et u un endomoprhisme de E.

1) On suppose que : $\forall x \in E$, $(x, u(x))$ est liée. Montrer que u est une homothétie
2) En déduire que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de coeficients diagonaux nuls
3) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer l'équivalence entre :

(i) $tr(A) = 0$

(ii) $\exists U, V \in M_n(\mathbb{K}), A = UV - VU$

Indication : On pourra considérer l'image de $\phi : M \rightarrow MD - DM$ où $D = diag(i), i \in [\![1, n]\!]$

(d) Soit une forme linéaire f vérifiant : $\forall X, Y \in M_n(\mathbb{K})$, $f(XY) = f(YX)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $f = \lambda.tr$

(e) Sur les hyperplans de $M_n(\mathbb{K})$:

1) Montrer que $\Phi : A \rightarrow (M \rightarrow tr(AM))$ est un isomorphisme entre $M_n(\mathbb{K})$ et son dual.
2) En déduire que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$

(f) Montrer que la famille $(x \rightarrow |x - a|)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre (à définir pour un ensemble non discret)

(g) 1) Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que : $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base s'écrive :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que : $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Montrer que f est de rang 1

(h) Sur l'indice de nilpotence :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et u un endomoprhisme nilpotent de E, d'indice de nilpotence $k \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $k \leq n$

2) Montrer que u ne peut être inversible

3) Soient $u_1, .., u_n$ n endomorphismes nilpotents commutant 2 à 2. Montrer que $u_1 \circ .. \circ u_n = 0$

(i) Sur la formule de Grassman :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et soient $S = (u_1, ..., u_n)$ un système de vecteurs de E et $S' = (u_1, ..., u_p)$ extrait de S ($i.e : p \leq n$). Si l'on note $r = dim(S)$, montrer alors que : $dim(S') \geq r + p - n$

(j) Sur la supplémentarité :

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $p \leq n$. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun.

(k) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et u et v 2 endomoprhismes de E.

1) Montrer que : $rg(u \circ v) = rg(v) - dim(Im(v) \cap Ker(u)) = rg(u) - n + dim(Im(v) + Ker(u))$

2) En déduire : $rg(u) + rg(v) - n \leq rg(u \circ v) \leq min(rg(u), rg(v))$

(l) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et u un edomorphisme de E. Montrer qu'on peut écrire : $u = g \circ p$ avec g inversible et p projecteur